

Cantidad de movimiento en la máquina de Atwood.

Jorge Saavedra y Pablo Adrián Nuñez.
jorgesaavedra@topmail.com.ar pablo_nuniez2000@yahoo.com.ar
Red participativa de Ciencia – UNSAM - 2005

Resumen

En el presente trabajo se puso a prueba la predicción que propone la segunda ley de Newton para la acción de Fuerzas netas exteriores constantes. Según ésta si la fuerza exterior es constante en el tiempo la función de cantidad de movimiento debe ajustarse a una función lineal del tiempo donde la pendiente debe ser el valor de la fuerza neta exterior constante propuesta. Para el diseño experimental se propone el empleo de la máquina de Atwood donde además se incluyó una tercer masa como variante. Los resultados obtenidos verificaron la hipótesis propuesta.

Introducción

El motivo de este trabajo es la inclusión en la clásica experiencia de la Máquina de Atwood del concepto de cantidad de movimiento de un sistema de partículas y su interpretación bajo la mirada de la segunda Ley de Newton.

La máquina de Atwood fue diseñada por George Atwood (1784) para demostrar las leyes del movimiento acelerado y medir g , la aceleración de la gravedad terrestre. El dispositivo está formado básicamente por dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa por una polea (ver fig. 1a). Haciendo la diferencia pequeña entre m_1 y m_2 , es posible retardar el efecto de la caída libre y medir el movimiento del peso en caída con un reloj de péndulo, la manera más precisa de medir intervalos en aquella época.¹

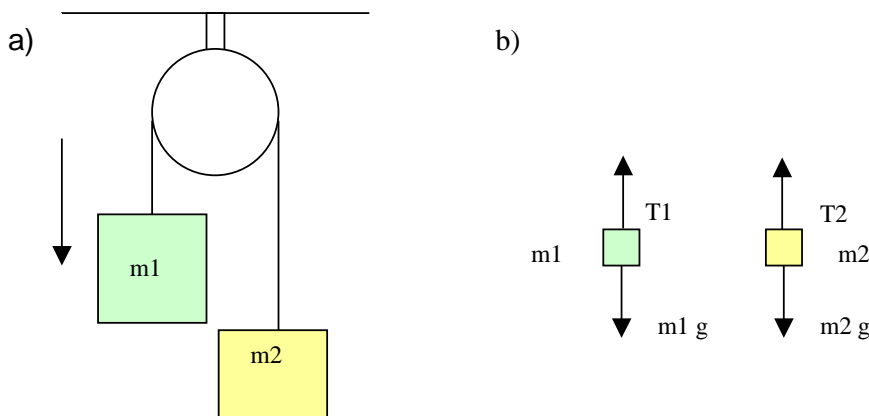


Figura 1 a) Dispositivo conocido como Máquina de Atwood. En este caso consideramos $m_1 > m_2$ por lo que el movimiento será en el

sentido de la flecha. **b)** Diagrama de cuerpo libre de m_1 y de m_2 . Esto permite estudiar las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo para poder plantear las ecuaciones dinámicas.

Las ecuaciones dinámicas que surgen estudiando el diagrama de cuerpo libre (ver fig. 1b) son:

$$\text{Bloque 1: } \sum F = -T_1 + m_1 g = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$\text{Bloque 2: } \sum F = -m_2 g + T_2 = m_2 \cdot a \quad (2)$$

A partir de estas ecuaciones y de considerar despreciable el rozamiento de la polea, así como también despreciar la masa de la misma y de la cuerda, pueden obtenerse las siguientes expresiones de la aceleración a del sistema formado por las masas m_1 y m_2 y de la aceleración g :²

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3)$$

y

$$g = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} a \quad (4)$$

Nos interesa ahora analizar la cantidad de movimiento del sistema y estudiar el proceso con la variante de introducir una tercer masa m_3 sujeta a m_2 de manera que el sistema luego de un intervalo de tiempo aparezca la acción de la fuerza $m_3 g$ y produzca un cambio en la función de cantidad de movimiento:

Partimos pues de la segunda ley de Newton en su expresión:

$$\sum F = \frac{dP}{dt} \quad (5)$$

La cual se lee: *la sumatoria de fuerzas exteriores (fuerza neta exterior) producen una variación instantánea de la cantidad de movimiento del sistema sobre el que actúan.*

Es importante señalar que para el caso de la máquina de Atwood el sistema está formado por las masas de los bloques suspendidos y las fuerzas exteriores que son los pesos generados por la Tierra y la fuerza de rozamiento, es decir que excluimos las tensiones de las cuerdas por considerarlas interiores al sistema en cuestión.

La cantidad de movimiento P se define como el producto de la masa por la velocidad de la misma:

$$P = m \cdot v \quad (6)$$

Si el sistema está formado por n masas la cantidad de movimiento del sistema se define como:³

$$P_{sist} = \sum_1^n m_i v_i \quad (7)$$

Si la fuerza neta exterior es constante la ley (ec. 5) predice que la función de P será una ecuación lineal de t. De modificarse en un momento dado este valor por otro valor también constante en otro intervalo de tiempo, la función de P será otra función lineal de t durante ese nuevo intervalo pero con distinta pendiente e igual a la nueva fuerza neta. Es decir que el modelo arroja como consecuencia que para la F_{net}a exterior constante la función de P deberá ser de la forma:

$$P(t) = a.t + b \quad (8)$$

Nuestro objetivo es entonces verificar experimentalmente la hipótesis propuesta en el párrafo anterior y corroborar lo predicho por la segunda ley de Newton en su versión expresada en la ecuación (5).

Método experimental:

Dispondremos de un dispositivo a modo de la máquina de Atwood (ver Figura 2) pero incluyendo una tercer masa m₃ sujeta a la masa m₂ por medio de una cuerda.

Para dicho dispositivo se emplearon un fotointerruptor, el programa Precision Timer y una polea *Super pulley PASCO* (ver especificaciones en Apéndice).

Se coloca un fotointerruptor a la altura de la polea ya que la misma posee diez rayos los cuales al girar permitirán medir el tiempo de desplazamiento de las masas.

La medición directa de estos tiempos permite luego mediante el uso de una planilla de cálculo obtener los valores de la velocidad para cada instante necesaria para obtener la función de cantidad de movimiento según lo expresado en la ecuación (7).

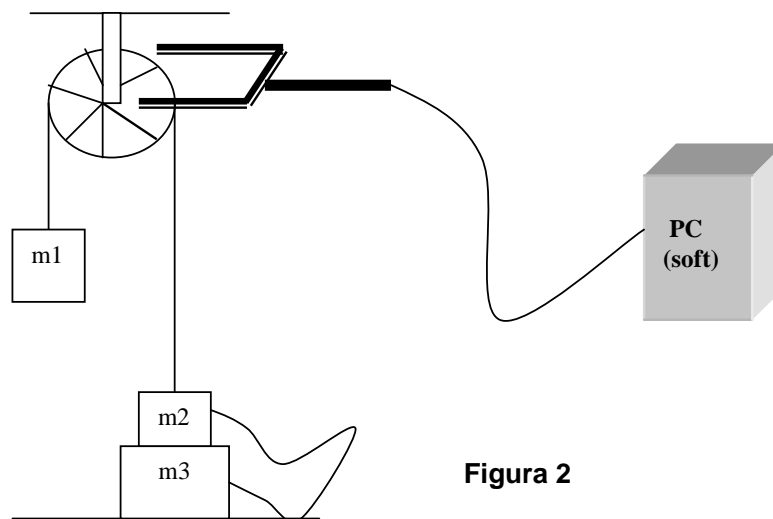


Figura 2

Las masas empleadas fueron medidas en forma directa en una balanza digital de precisión de $\pm 0,0001\text{kg}$ y los tiempos tomados por la PC poseen una indeterminación del orden de $\pm 0,0001\text{seg}$.

Para nuestro caso particular empleamos masas cuyas magnitudes fueron:

$$m_1 = (0.0850 \pm 0.0001)\text{Kg}$$

$$m_2 = (0.0400 \pm 0.0001)\text{Kg}$$

$$m_3 = (0.0500 \pm 0.0001)\text{Kg}$$

La mayor indeterminación estará en el grado de rozamiento de la polea y en lo significativo de su masa respecto a las masas empleadas en la experiencia. Para nuestro dispositivo hemos trabajado con una polea de buen rodamiento y de material plástico liviano, para disminuir en lo más posible dicha incertidumbre.

Nota: para un tratamiento que contemple el rozamiento de la polea y la masa de la misma ver apéndice.

La puesta en marcha de la experiencia implica diferenciar dos instantes o intervalos de tiempo donde en un instante inicial (Δt_1) las fuerzas exteriores aportadas al sistema son las de los pesos de m_1 y m_2 , y en un segundo instante (Δt_2) al momento de tensarse la cuerda que une a m_3 con m_2 , aquella agregará su peso como fuerza exterior al sistema.

Resultados

Cantidad de movimiento del sistema

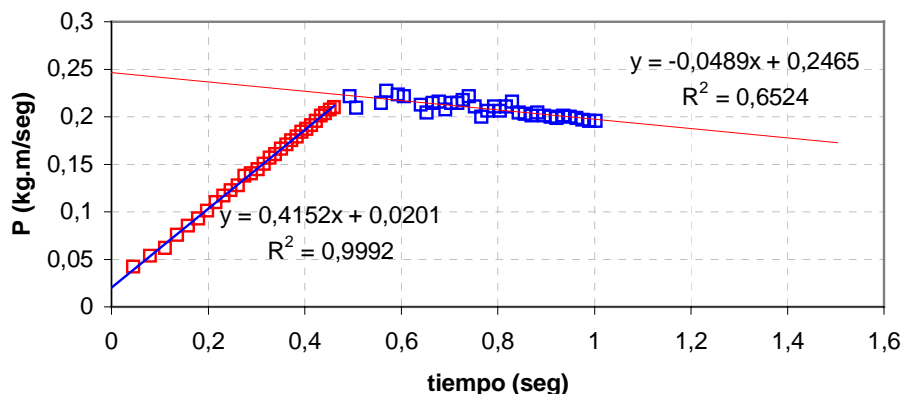


Grafico1. Aquí puede apreciarse como la cantidad de movimiento para un primer intervalo de tiempo ($\Delta t_1 = (0\text{seg}; 0.46\text{seg})$) se ajusta a una función lineal con la esperada ya que la fuerza neta constante es resultado de los pesos de m_1 y m_2 . Para un segundo momento ($\Delta t_2 = (0.46\text{seg}; 1\text{seg})$) la incorporación de m_3 evidencia un cambio en la fuerza neta exterior y por ende un cambio según lo predicho por la ley de Newton en la función de cantidad de movimiento.

La pendiente de la función de P para el primer instante arroja como resultado que la fuerza exterior neta actuante es de:

$$F_{\text{net}} 1(\text{experimental}) = (0.415 \pm 0.003) \text{N},$$

mientras que lo predicho según la segunda ley de Newton, ec. (5):

$$F_{\text{net}} 1(\text{teórica}) = m_1 g - m_2 g = (0.441 \pm 0.002) \text{N}.$$

Análogamente para el segundo instante en que m_3 incorpora su peso al sistema el resultado arrojado por el experimento es:

$$F_{\text{net}} 2(\text{experimental}) = (-0.049 \pm 0.006) \text{N},$$

y su correspondiente predicción teórica

$$F_{\text{net}} 2(\text{teórica}) = m_1 g - m_2 g - m_3 g = (-0.049 \pm 0.003) \text{N}$$

Discusión

Al comparar los resultados experimentales con los predichos por la segunda ley de Newton encontramos consistencia en los resultados para los intervalos de tiempo donde actúan m_1 y m_2 y una coincidencia dentro del error experimental del valor esperado para el segundo instante donde actúa el peso de m_3 modificando la fuerza exterior del sistema.

Consideramos importante variar las masas para estudiar distintos casos que permitan evaluar mejor la verificación de la cantidad de movimiento a partir del valor de la fuerza exterior actuante en el sistema.

Por otra parte incluir el momento de inercia de la polea y la fuerza de rozamiento asegurará un estudio más detallado y robusto de la verificación del modelo planteado.

Conclusiones

La segunda ley de Newton permitió plantear la hipótesis de que la acción de una fuerza constante implicaría que la cantidad de movimiento debería estar representada por una función lineal donde su pendiente indica el valor de la fuerza neta exterior actuante en el sistema.

La hipótesis propuesta sobre el modelo dinámico de Newton pudo ser verificada en forma experimental ya que pudo comprobarse la linealidad de la función de la cantidad de movimiento en el tiempo para la acción de fuerzas exteriores constantes y que la pendiente de dicha función obtenida fuera al menos consistente con los valores y signos de las fuerzas exteriores netas actuantes en el sistema de la máquina de Atwood.

Referencias

^{1,2} Resnick-Halliday-Krane, *Física vol. 1*, CECSA, 4ta ed. México 1997, Cap. 5, sección 5.11, pág. 104.

³ Resnick-Halliday-Krane, *Física vol. 1*, CECSA, 4ta ed. México 1997, Cap. 9, sección 9.5, pág. 214.

⁴ S. Gil – E. Rodríguez, *Física re-Creativa*, Prentice Hall, Perú 2001.

⁵ P. Tipler, *Física para la ciencia y la tecnología, vol 1*. Reverté, 4ta ed. España 1999.

⁶ Vernier Software & Technology, www.vernier.com

Apéndice

Modelo dinámico teniendo en cuenta la masa de la polea y la fuerza de rozamiento en la misma.

$$\text{Bloque 1: } \sum F = -T_1 + m_1 g = m_1 a \quad (\text{a})$$

$$\text{Bloque 2: } \sum F = -m_2 g + T_2 = m_2 a \quad (\text{b})$$

$$\text{Polea: } \sum F = R(T_1 - T_2) - f_r \cdot r = I \cdot \frac{a}{R} \quad (\text{c}),$$

Donde I es el momento de inercia de la polea, R es el radio de la misma y r el radio del eje.

Obsérvese que el valor de a puede obtenerse experimentalmente, por lo que de las ecs. (a) y (b) se resuelven las tensiones T_1 y T_2 . Suponiendo que el momento de inercia de la polea es de: ⁵

$$I = \frac{1}{2} m_p \cdot R^2 \quad (\text{d}),$$

donde m_p es la masa de la polea. Entonces de (c) podrá obtenerse el valor de f_r .

En nuestro caso la polea posee: un diámetro de $5.00\text{cm} \pm 0.05\text{cm}$, un eje de 0.2cm de diámetro aproximadamente, una masa de 5.5 g y un momento de inercia de $1.8 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$ (estos últimos dos son datos obtenidos del proveedor Vernier Software & Technology ⁶).

Vale señalar que a modo de sugerencia la fuerza de rozamiento puede obtenerse en forma experimental midiendo la aceleración de la polea si se la pone a girar libremente y se miden los tiempos por medio del fotointerruptor y recurriendo a la relación dinámica:

$$- f_r \cdot r = I \cdot \frac{a}{R} \quad (\text{e})$$

Otro análisis más preciso respecto de la fuerza de rozamiento es el siguiente:

Considerando la ec. (c), dividiendo por R y sumando las ec. (a) y (b) resulta:

$$m_1 g - m_2 g - f_r \frac{r}{R} = (m_1 + m_2 + \beta m_p).a \quad (f)$$

donde $0.5 < \beta < 1$.

De aquí puede estudiarse en forma experimental la función:

$$M_t . a = \Delta m g - f_r \cdot \frac{r}{R} \quad (g)$$

donde

$$M_t = m_1 + m_2 + m_p \quad (h)$$

y

$$\Delta m g = m_1 - m_2 . \quad (i)$$

Puede observarse que de la ordenada al origen se obtiene el valor de la fuerza de rozamiento f_r .

Como muestra de este posible análisis exponemos el resultado obtenido en nuestro caso para la polea empleada:

Gráfico para obtener la fuerza de rozamiento

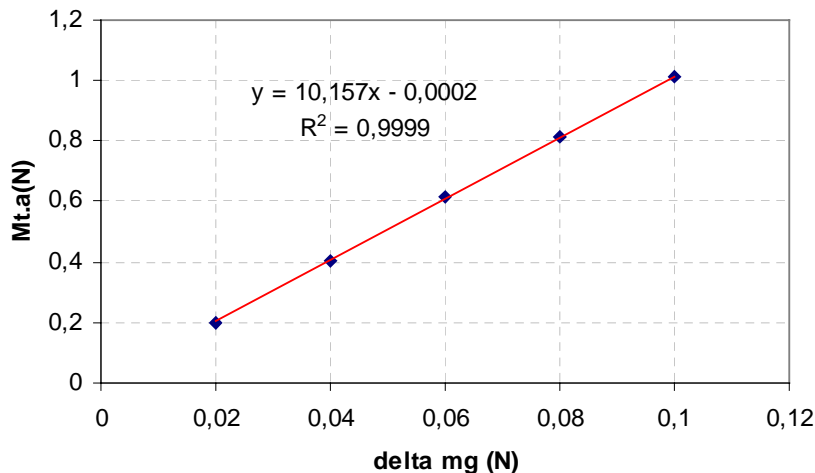


Gráfico 2. En este gráfico la ecuación permite determinar por medio de la ordenada al origen el valor de $f_r \cdot r/R$ que es igual a 0.0002. En este caso se ha utilizado el valor máximo de $\beta = 1$. Conociendo r y R puede determinarse f_r .

El valor hallado en nuestro caso para f_r es de:

$$f_r = 0.005 \text{ N}$$

La magnitud de fr es despreciable, como lo hemos considerado para nuestro caso, ya que es del orden de la indeterminación de los resultados obtenidos.

Propagación de errores

Como la fuerza neta experimental la obtenemos de la pendiente del Gráfico 1, la indeterminación de dicha pendiente es por ende la indeterminación de la fuerza exterior neta experimental. Dicha indeterminación responde a la ecuación para el cálculo de sigma (σ) de la pendiente de la recta considerada ⁴:

$$\Delta F_{\text{neta experimental}} = ((k^2/N-2).(1/R^2-1))^{0.5} \quad (j)$$

Donde k es la pendiente de la recta, N el número de mediciones, y R^2 el coeficiente de correlación.

Por otra parte la indeterminación de la Fuerza exterior neta teórica se obtiene de:

$$\Delta F_{\text{neta teórica 1}} = (\Delta(m_1+m_2)/m_1-m_2) . (m_1g-m_2g) \quad (k)$$

$$\Delta F_{\text{neta teórica 2}} = (\Delta(m_1+m_2+m_3)/(m_1-m_2-m_3)) . (m_1g-m_2g-m_3g) \quad (h)$$